1.17) a) $S = \{P \in \mathbb{R}_2[x] : P(1) = 0\}$

Un P genérico de $\mathbb{R}_2[x]$ es $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

y la ecuación queda:

$P(1)=0 \to a_0 + a_1 + a_2 = 0 \to a_0 = -a_1 - a_2.$

Reemplazo esto en el genérico:

$P(x) = -a_1 - a_2 + a_1 x + a_2 x^2 \to$

$\to P(x) = a_1 . (-1+x) + a_2 . (-1+x^2)$

Como en $\{(-1+x), (-1+x^2)\}$ sus componentes tienen distinto grado, son LI y dim = 2, por lo tanto genera $\mathbb{R}_2[x]$ y es LI → es base y tiene dimensión 2. S por lo tanto también tiene dim(S) = 2

$\boxed{\text{Base} = \{(-1+x), (-1+x^2)\} \quad \text{Dim}(S) = 2}$

b) $S = \{P \in \mathbb{R}_3[x] : \underbrace{P(1)=0}_{\text{I}}, \underbrace{P(2)=0}_{\text{II}}\}$

Un P genérico de $\mathbb{R}_3[x]$ es $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

y las ec. quedan:

I $\to P(1)=0 \to a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \to \boxed{a_0 = -a_1 - a_2 - a_3}$ III

II $\to P(2)=0 \to a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0 \to$ Meto III acá $\to$

$\to -a_1 - a_2 - a_3 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0 \to a_1 + 3a_2 + 7a_3 = 0 \to$

$\to \boxed{a_1 = -3a_2 - 7a_3}$ IV

IV en III $\to a_0 = 3a_2 + 7a_3 - a_2 - a_3 \to$

$\to \boxed{a_0 = 2a_2 + 6a_3}$ V

Meto IV y V en el genérico:

$P(x) = 2a_2 + 6a_3 + (-3a_2 - 7a_3)x + a_2 . x^2 + a_3 x^3 \rightarrow$

$\rightarrow P(x) = a_2 . (2 - 3x + x^2) + a_3 . (6 - 7x + x^3)$

Como $\{(2-3x+x^2), (6-7x+x^3)\}$ tiene componentes de distinto grado, son LI. Como también generan $\mathbb{R}_3[x]$, entonces $\boxed{\{(2-3x+x^2), (6-7x+x^3)\} \text{ es base}}$ y tiene dim = 2, por lo tanto $\boxed{\text{Dim}(S) = 2}$

c) $S = \{P \in \mathbb{R}_4[x] : \underbrace{p(1) = 0}_{\text{I}}, \underbrace{p'(1) = 0}_{\text{II}}, \underbrace{p''(1) = 0}_{\text{III}}\}$

Un P genérico de $\mathbb{R}_4[x]$ es $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

I $\rightarrow P(1) = 0 \rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \rightarrow \boxed{a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 - a_4}$ IV

II $\rightarrow p'(1) = 0 \rightarrow p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 \rightarrow p'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 \rightarrow$

$\rightarrow p'(1) = 0 \rightarrow a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0 \rightarrow \boxed{a_1 = -2a_2 - 3a_3 - 4a_4}$ V

III $p''(1) = 0 \rightarrow p''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 \rightarrow p''(1) = 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 \rightarrow$

$\rightarrow p''(1) = 0 \rightarrow 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 = 0 \rightarrow \boxed{a_2 = -3a_3 - 6a_4}$ VI

Uso VI en V $\rightarrow a_1 = 6a_3 + 12a_4 - 3a_3 - 4a_4 \rightarrow \boxed{a_1 = 3a_3 + 8a_4}$ VII

Uso VII y VI en IV $\rightarrow a_0 = -3a_3 - 8a_4 + 3a_3 + 6a_4 - a_3 - a_4 \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{a_0 = -a_3 - 3a_4}$ VIII

Uso (VI), (VII) y (VIII) en el genérico:

$P(x) = -a_3 - 3a_4 + (3a_3 + 8a_4)x + (-3a_3 - 6a_4)x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \rightarrow$

$\rightarrow P(x) = a_3 \cdot (-1 + 3x - 3x^2 + x^3) + a_4 \cdot (-3 + 8x - 6x^2 + x^4) \rightarrow$

$\rightarrow$ Como $\{(-1+3x-3x^2+x^3), (-3+8x-6x^2+x^4)\}$ tiene componentes de grado distinto son LI. Como también generan $\mathbb{R}_4[x]$, entonces $\boxed{\{(-1+3x-3x^2+x^3), (-3+8x-6x^2+x^4)\} \text{ es base}}$ y tiene dimensión 2 $\rightarrow$ $\boxed{\dim(S) = 2}$

1.17) d) $S = \{P \in \mathbb{R}_4[x] : P + (1-x)P' = 0\}$

P genérico de $\mathbb{R}_4[x] \rightarrow P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$.

~~en la ecuación~~

$P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$

$\rightarrow$ en la ec. $\rightarrow$ $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + (1-x).(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 - a_1x - 2a_2x^2 - 3a_3x^3 - 4a_4x^4 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (a_0 + a_1) + x.(2a_2) + x^2.(a_2 + 3a_3 - 2a_2) + x^3.(a_3 + 4a_4 - 3a_3) + x^4.(a_4 - 4a_4) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (a_0 + a_1) + x.(2a_2) + x^2.(-a_2 + 3a_3) + x^3.(-2a_3 + 4a_4) + x^4.(-3a_4) = 0$

Como es un polinomio, para ser 0 sus coef. deben ser 0:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 0 \rightarrow \boxed{a_0 = -a_1} \; \text{(I)} \\ 2a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 0 \; \text{(II)} \\ -a_2 + 3a_3 = 0 \rightarrow a_2 = 0 \\ -2a_3 + 4a_4 = 0 \rightarrow a_3 = 0 \; \text{(III)} \\ -3a_4 = 0 \rightarrow a_4 = 0 \; \text{(IV)} \end{cases}$$

~~Uso (I) en el genérico~~ Uso (I), (II), (III) y (IV) en el genérico

$P(x) = -a_1 + a_1 x + \overset{\to 0}{a_2} x^2 + \overset{\to 0}{a_3} x^3 + \overset{\to 0}{a_4} x^4 \to P(x) = a_1 . (-1 + x)$

Por lo tanto como $\boxed{\{(-1+x)\}}$ es LI y genera $\mathbb{R}_4[x]$, es base y tiene dimensión 1 $\to$ $\boxed{\dim(S) = 1}$

e) $S = \{ p \in \mathbb{R}[x] : p^{(m)} = 0$

Un P genérico de $\mathbb{R}[x]$ es $\to P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$

Con $p^{(m)}$ nos dicen que al hacer l m-esima derivada de p, da 0.

Entonces necesito un polinomio que sea de grado a lo sumo m-1.

Entonces $P(x) = a_0 + a_1 . x + \dots + a_{m-1} x^{m-1}$

Por lo tanto $\{1, x, \dots, x^{m-1}\}$ es un generador de S y como sus componentes son de distinto grado, es LI. Por lo tanto, es base con dimensión m.

$\boxed{Base = \{1, x, \dots, x^{m-1}\}, \ Dim(S) = m.}$